به نام چاشنی‌بخش زبان‌ها

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

نظریه زبان ها و ماشین ها

استاد: دکتر قوامی زاده

بهار ۱۴۰۵

پاسخنامه‌ی تمرین چهارم

لم تزریق، خواص بستاری

گردآورندگان:
ماهان بانشی
آیسودا فضلی خانی

سوال اول

منظم بودن یا نبودن زبان‌های زیر را تعیین کنید. منظم بودن را با نوشتن رجکس و یا رسم FSA و نامنظم بودن را با استفاده از لم تزریق اثبات کنید.

a) $L = \{(ab)^n a^{2n} | \, n \geq 0\}$

این زبان نامنظم است. با استفاده از لم تزریق اثبات می‌کنیم. ابتدا آن را وارون می‌کنیم:

$$L^R = \{a^{2n}(ab)^n | \, n \geq 0\}$$

فرض می‌کنیم این زبان با یک ماشین k وضعیتی توصیف می‌شود.

رشته‌ی $a^{2k}(ab)^k$ که عضو زبان است را انتخاب می‌کنیم. در a^{2k} قطعا یک چرخه وجود دارد. در این چرخه به ازای $i = 0$ به این رشته‌ی نامعتبر می‌رسیم: $a^{2k-l}(ab)^k$. $(s + l + t = k)$

پس ماشین ما در صورت وجود رشته‌ی نامعتبری تولید می‌کند. پس چنین ماشینی وجود ندارد و زبان نامنظم است.

ضمنا اگر معکوس هر زبانی نامنظم باشد خودش هم نامنظم خواهد بود.

b) $L = \{w | \, |w| \; is \; a \; number \; in \; fibonacci \; sequence, w \in \{a, b\}^*\}$

این زبان نامنظم است.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \rightarrow \forall n \geq 4: f_n - f_{n-1} > n - 3 \rightarrow f_{k+3} - f_{k+2} \geq k + 1 > k$$

فرض می‌کنیم ماشین متناهی k وضعیتی این زبان را پذیرش می‌کند. رشته‌ی $z = a^{f_{k+3}}$ را انتخاب می‌کنیم. در k کارکتر اول این رشته چرخه‌ای به طول l وجود دارد که $(1 \leq l \leq k)$. به ازای $i = 2$ به رشته‌ی $z` = a^{f_{k+3}+l}$ می‌رسیم.

همچنین $f_{k+3} < f_{k+3} + l < f_{K+4}$ است. پس $z`$ رشته‌ای نامعتبر است و L زبانی نامنظم.

c) $L = \{a^m b^n | \, LCM[m, n] = mn\}$

$\gcd =$ بزرگترین مخرج مشترک , $LCM =$ کوچکترین مضرب مشترک

این زبان نامنظم است. می‌دانیم که $\gcd(m, n) * LCM[m, n] = mn$. پس می‌توان زبان را معادل $L = \{a^m b^n | \, \gcd(m, n) = 1\}$ در نظر گرفت. فرض می‌کنیم یک ماشین متناهی k وضعیتی برای L وجود دارد. همچنین p یک عدد بزرگتر مساوی k است و در k کاراکتر اول رشته عضو زبان حتما چرخه‌ای به طول l وجود دارد. و می‌دانیم که $1 \leq l \leq k \, , s + l + t = k \, , s + l \leq k$.

$$z = a^p b^{(p-1)!} = a^s a^l a^t a^{p-k} b^{(p-1)!}$$

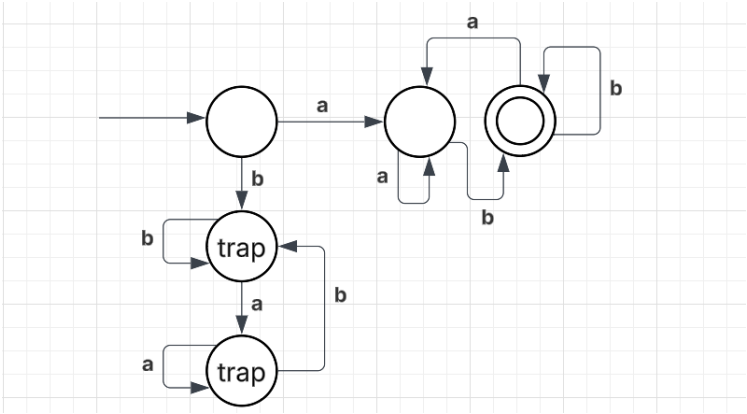
$$if \; i \neq 1 \rightarrow z` = a^{p+(i-1)l} b^{\frac{(p+k)!}{p!}} \quad if \; i = 2 \rightarrow a^{p+l} b^{\frac{(p+k)!}{p!}}$$

$$\gcd\left(p + l \, , \frac{(p + k)!}{p!}\right) = p + l \neq 1$$

پس رشته‌ی نامعتبر تولید شد و زبان ما نامنظم است.

d) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid n_{ab}(w) > n_{ba}(w)\}$

این زبان منظم است.



e) $L = \{b^*a^*bba^na^*bba^nb \mid n \geq 1\}$

این زبان نامنظم است. با لم تزریق نشان می‌دهیم.

ابتدا آن را وارون می‌کنیم. طبق خواص بستار اگر وارونش نامنظم باشد خودش هم نامنظم است و برعکس.

$$L2^R = \{ba^nbba^*a^nbba^*b^* \mid n \geq 1\}$$

این رشته را در نظر می‌گیریم که در زبان هست:

$$z = ba^kbba^kbb$$

در اول رشته یعنی بخش ba^k قطعا چرخه ای به طول حداقل 1 وجود دارد. این چرخه 3 حالت دارد:

- فقط شامل b باشد: در این حالت به ازای $i = 0$ به رشته ی نامعتبری می‌رسیم. (رشته ای که با b شروع نمی‌شود.)
- فقط شامل a باشد: در این صورت نیز به ازای $i = 2$ به رشته ای نامعتبر می‌رسیم.
- هم شامل a و هم شامل b باشد: در این صورت نیز به ازای $i = 0$ دوباره به رشته ی نامعتبر می رسیم. چون رشته دیگر با b شروع نمی‌شود.

پس ماشین ما در صورت وجود رشته ی نامعتبری تولید می‌کند. پس چنین ماشینی وجود ندارد و زبان نامنظم است.

f) $L = \{w_1cw_2 | w_1, w_2 \in \{a,b\}^*,\ w_1 \neq w_2^R\}$

این زبان نامنظم است.

فرض می کنیم زبان منظم است و آتاماتای m با k استیت موجود است به‌طوری که L=L(m). رشته $z = a^kbcba^{k+k!}$ را درنظر می‌گیریم که در زبان می‌باشد. طبق لم تزریق رشته را می‌توان به ۳زیر رشته xyz تقسیم کرد و چون $|xy| \leq k$ می‌باشد پس x و y در ابتدای رشته قرار می‌گیرند و چرخه فقط شامل a می‌باشد. باید مقدار صحیحی برای i پیدا کنیم تا رشته xy^iz از زبان خارج شود و برای این کار باید قسمت اول و معکوس قسمت دوم رشته یکسان شوند یا به عبارتی تعداد aهای ابتدای رشته با تعداد aهای انتهای رشته برابر شود:

$$k + (i-1)\alpha = k + k! \rightarrow (i-1)\alpha = k! \rightarrow i - 1 = \frac{k!}{\alpha}$$

به دلیل این که $1 \leq \alpha \leq k$ می‌باشد پس α مقسوم‌علیه $k!$ است و $\frac{k!}{\alpha}$ یک مقدار صحیح است و در نتیجه به‌ازای $i = \frac{k!}{\alpha} + 1$ رشته متعلق به زبان نخواهد بود.

g) $L = \{a^{n!} | n \geq 0\}$

فرض می‌کنیم زبان منظم است و آتامای m با k استیت موجود است به‌طوری که $L = L(m)$. رشته $z = a^{k!}$ را درنظر می‌گیریم که متعلق به زبان است. اگر طول حلقه را β در نظر بگیریم، با انتخاب $i = 2$ طول رشته برابر خواهد بود با:

$$k! + \beta$$

باید بررسی کنیم آیا حاصل $k! + \beta$ می‌تواند یک عدد فاکتوریل باشد یا خیر. چون $1 \leq \beta \leq k$ می‌باشد پس طول رشته جدید بین $k!$ و $k! + k$ است. همچنین عدد فاکتوریل بعدی پس از $k!$، $(k+1)!$ است که برابر با $k.k! +$ $k!$ است و به ازای $k \geq 2$ واضح است که $k.k! + k! > k! + k$ است. پس طول رشته جدید بین دو فاکتوریل متوالی $k!$ و $(k+1)!$ قرار خواهد داشت و درنتیجه رشته‌ای حاصل می‌شود که متعلق به زبان نیست.

سوال دوم

بررسی کنید که آیا رشته ی داده شده برای اثبات نامنظم بودن زبان با استفاده از لم تزریق مناسب است یا خیر. در صورت مناسب بودن آن را توضیح دهید و در غیر این صورت با استفاده از رشته ی مناسب نامنظم بودن زبان را اثبات کنید.

پاسخ

a) $L = \{a^n w w^R b^n | n \geq 0, w \in \{a,b\}^*\}, \quad z = a^k b^k$

رشته داده شده نامناسب می‌باشد. یک رشته مناسب برای اثبات نامنظم بودن زبان $z = a^k baabb^k$ است. در تجزیه رشته به 3 قسمت xyz، بخش y یا همان چرخه فقط شامل aهای ابتدای رشته خواهد بود و به‌ازای انتخاب $i = 0$ رشته حاصل $a^{k-\beta} baabb^k$ خواهد بود و تنها راهی که می‌توان آن را به فرم زبان داده شده در نظر گرفت این است که $n' = k - \beta$ باشد و در این حالت بخش پالیندروم رشته برابر می‌شود با $baabb^\beta$ که به‌ازای هیچ مقداری برای β متقارن نمی‌باشد. پس به ازای $i = 0$، رشته حاصل متعلق به زبان نخواهد بود.

b) $L = \{ww | w \in \{a,b\}^*\}, \quad z = a^k b a^k b$

رشته داده شده مناسب می‌باشد. مطابق لم تزریق به دلیل این که $|xy| \leq k$ است، بخش حلقه فقط شامل aهای ابتدای رشته خواهد بود. با انتخاب $i = 2$ رشته حاصل $z' = a^{k+\beta} b a^k b$ خواهد بود که دقیقا 2 تا b دارد و هر w باید دقیقا یک b در انتهای خود داشته باشد و طولش $k + \beta + 1$ باشد درصورتی که طول کل رشته $2k + \beta + 2$ است و در این‌صورت مقدار β باید صفر باشد که باعث تناقض می‌شود. (β طول چرخه آتاماتای پذیرنده می‌باشد)

c) $L = \{w | n_a(w) \neq n_b(w), w \in \{a,b\}^*\}, \quad z = a^{k-1}b^k$

رشته داده شده نامناسب می‌باشد. یک رشته مناسب برای اثبات نامنظم بودن زبان $z = a^k b^{k+k!}$ است. در این رشته حلقه شامل aهای ابتدای رشته خواهد بود و اگر طول حلقه را β درنظر بگیریم، رشته‌های متعلق به زبان $z' = a^{k+(i-1)\beta} b^{k+k!}$ خواهند بود. می‌خواهیم با انتخاب یک مقدار صحیح برای i، تعداد a و b در رشته برابر شود:

$$k + (i-1)\beta = k + k! \rightarrow (i-1)\beta = k! \rightarrow i = \frac{k!}{\beta} + 1$$

به دلیل این‌که $1 \leq \beta \leq k$ است پس β همیشه مقسوم‌علیه $k!$ می‌باشد و در نتیجه حاصل $\frac{k!}{\beta} + 1$ یک عدد صحیح می‌باشد و با انتخاب این مقدار برای i، رشته حاصل از زبان خارج می‌شود.

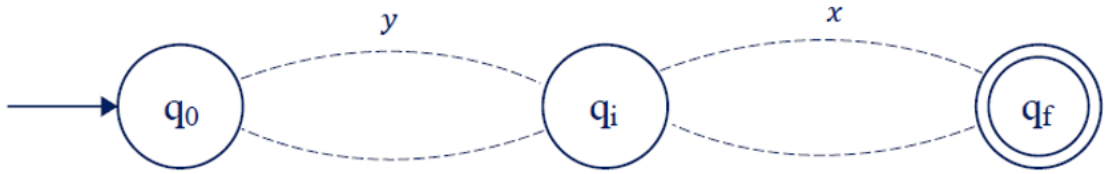
سوال سوم

صحیح یا غلط بودن جملات زیر را مشخص کنید. دلیل خود را توضیح دهید.

پاسخ

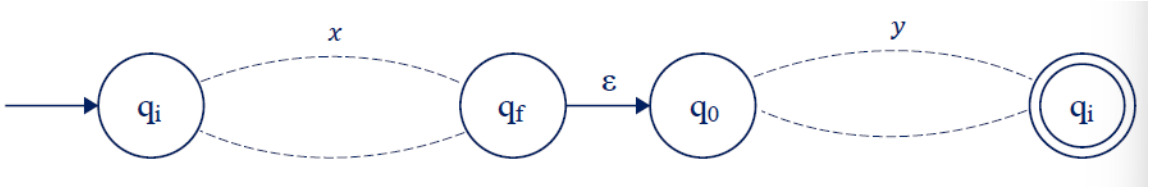
a) اگر L یک زبان منظم باشد، زبان $\{xy \mid yx \in L\}$ نیز منظم است.

چون L یک زبان منظم است، بنابراین به ازای هر $w = xy$ موجود در زبان، در DFA زبان که آن را M می‌نامیم داریم:



q_i هر وضعیتی بین q_0 و q_f برای خواندن رشته w و پذیرش آن است.

به ازای $q_i \in Q$ می‌توان ماشین متناهی M_i را از روی M بصورت زیر ساخت تا xy را پذیرش کند:



ماشین زبان $\{xy \mid yx \in L\}$ از اجتماع همه‌ی M_i ها حاصل می‌شود. از آنجایی که ماشین حاصل متناهی است، بنابراین این زبان منظم است.

b) اگر $L \subseteq \{0,1\}^*$ یک زبان نامنظم باشد آنگاه $L.L.L$ حتما نامنظم است.

نادرست. مثال نقض:

$$L = \left\{w \middle| w \in \{0,1\}^* \text{ , تعداد صفرها اول نباشد}\right\}$$

زبان L نامنظم است ولی $L.L.L$ منظم خواهد بود. چونکه هر عدد اول را می‌توان بصورت جمع 3 تا عدد غیر اول نوشت. پس $L.L.L$ می‌شود $\{w|w \in \{0,1\}^*$.

c) زبان‌های منظم تحت عملگر زیر، بسته هستند

$$Op(L) = \{w|w = xyz \ \wedge x, y, z \ \in L \ \wedge |x| = |y| = |z|\}$$

نادرست. مثال نقض:

$$L = \{0^*1^*\}, Op(L) = \{0^n10^n10^n1 \mid n > 0\}$$

موفق باشید!